

A කොටස

Paper Class 03

❖ සියලුම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න.

01. $\left[\frac{1 + \cos 4A}{\operatorname{cosec}^2 2A - 1} \right] + \left[\frac{1 - \cos 4A}{\sec^2 2A - 1} \right] \equiv 2$ බව පෙන්වන්න.

02. $a, b > 0$ හා $a, b \neq 1$ වන විට, $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ බව පෙන්වන්න.
 $\log_{10}(x-1) + \frac{1}{\log_{x+2} 10} = 1$ වන x ට තිබිය හැකි විසඳුම් සොයන්න.

03. \underline{a} සහ \underline{b} යනු ඒකක දෛශික වන අතර $\underline{a} + 2\underline{b}$ හා $5\underline{a} - 4\underline{b}$ ලම්බක වෙයි. \underline{a} සහ \underline{b} අතර කෝණය සොයන්න.

04. P, Q, R සහ S යනු $\overrightarrow{PQ} = 3\underline{a}$, $\overrightarrow{PR} = 2\underline{b}$, $\overrightarrow{PS} = 6\underline{b} - 6\underline{a}$ වන පරිදි වූ ලක්ෂ හතරකි. Q, R සහ S ඒක රේඛීය බව පෙන්වන්න.
 තව ද $QR:RS = 1:2$ බව ද අපෝහනය කරන්න.

05. $\frac{\log_t a}{b-c} = \frac{\log_t b}{c-a} = \frac{\log_t c}{a-b}$ නම් $a^a b^b c^c = 1$ බව පෙන්වන්න.

06. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{\sqrt[5]{22x+10}-2}{\sin(x-1)} \right] = \frac{11}{40}$ බව පෙන්වන්න.

07. $F(x) \equiv \sqrt{7x-x^2} + \log(x^2-1)$; $x \in (a, b]$ යැයි ගනිමු. F ශ්‍රිතයේ වසම සොයන්න.
 ඒනයින් a හා b තාත්වික නියත අගයන්න.

08. $x^2 + 2$ යන්න, $(x-1)$ හි ශ්‍රිතයක් ලෙස දෙන්න. ඒනයින් $\frac{x^2+2}{(x-1)^{2022}}$ යන්න හින්න භාගවලට වෙන් කරන්න.

09. $3 \cos x = 2 \cos(x-2y)$ නම් $5 \tan(x-y) \tan y = 1$ බව පෙන්වන්න.

10. $3(\sin\theta - \cos\theta)^4 + 6(\sin\theta + \cos\theta)^2 + 4(\sin 6\theta + \cos 6\theta)$ යන්න θ කෙරෙහි ස්ථායක බව සාධනය කරන්න.

12. (a) f හා g ශ්‍රිත පහත දැක්වෙන ලෙස අර්ථ දැක්වා ඇත.

$$f(x) = 3 - x^2; x \in \mathbb{R}$$

$$g(x) = \frac{2}{x+1}; x \in \mathbb{R} - \{-1\}$$

(i) f ශ්‍රිතයේ පරාසය සොයන්න.

(ii) g ශ්‍රිතයේ ප්‍රතිලෝම ශ්‍රිතය g^{-1} නම්,

(I) $g^{-1}(x)$ සොයන්න.

(II) $g^{-1}(x)$ ශ්‍රිතයේ පරාසය සොයන්න.

(iii) g හා f ශ්‍රිතවල සංයුත ශ්‍රිතය $g \circ f(x)$ යන්න h ලෙස අර්ථ දැක්වා ඇත්නම්

(I) $h(x)$ ශ්‍රිතය සුළු කර දක්වන්න.

(II) h ශ්‍රිතයට නිඛිල හැකි විශාලතම වසම කුමක් ද?

(b) $n \in \mathbb{R} - \{0\}$ විට $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[(a-n)x - \tan x] \sin nx}{x^2} = 0$ නම් $a = n + \frac{1}{n}$ බව පෙන්වන්න.

(c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cos(\pi x) + \sin(\pi x/2)}{(x-1)^2} = \frac{3\pi^2}{8}$ බව පෙන්වන්න.

(d) $\frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-3} > \frac{1}{x-1}$ අසමානතාවය විසඳන්න.

13. (a) $\tan\left[\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right] \equiv \sec x - \tan x$ බව සාධනය කරන්න. එනමින් $\tan\left[\frac{\pi}{8}\right] = \sqrt{2} - 1$ බව ලබා ගන්න. තවදුරටත් $\tan\left[\frac{11\pi}{24}\right] = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2} - 1}{1 + \sqrt{3} - \sqrt{6}}$ බව අපෝහනය කරන්න.

(b) $A + B + C = \pi$ නම්, $\tan\left(\frac{A}{2}\right)\tan\left(\frac{B}{2}\right) + \tan\left(\frac{C}{2}\right)\tan\left(\frac{A}{2}\right) + \tan\left(\frac{B}{2}\right)\tan\left(\frac{C}{2}\right) = 1$ බව පෙන්වන්න.

තවදුරටත් $\tan^2\left(\frac{A}{2}\right) + \tan^2\left(\frac{B}{2}\right) + \tan^2\left(\frac{C}{2}\right) \geq 1$ බව අපෝහනය කරන්න.

(c) $(1 + \sqrt{1+x}) \tan y = (1 + \sqrt{1-x})$ නම්, $x = \cos \theta$ ආදේශය භාවිතයෙන්

$$\tan y = \tan\left(\frac{\pi}{8} + \frac{\theta}{4}\right) \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

එනමින් $\sin 4y$ හි අගය අපෝහනය කරන්න.

(d) $\sin \alpha + \sin \beta = a$ ද $\cos \alpha + \cos \beta = b$ ද නම්, $\sin(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha + \beta)$, $\cos(\alpha - \beta)$ යන පද a, b ඇසුරින් දෙන්න.

$$\text{තවදුරටත්, } \tan \alpha + \tan \beta = \frac{8ab}{(a^2 + b^2)^2 - 4a^2} \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

14. (a) $ABCD$ ත්‍රැපීසියමේ $CD = \frac{1}{3} AB$ වේ. AB පාදය මත P ට්, AD මත Q ට් පිහිටා ඇත්තේ

$$\frac{AP}{PB} = \frac{1}{1} \text{ සහ } \frac{AQ}{QD} = \frac{1}{2} \text{ වන පරිදි ය. } DP \text{ සහ } QC \text{ පාද } R \text{ හිදී ජේදනය වේ.}$$

$$\overrightarrow{AB} = \underline{a} \text{ සහ } \overrightarrow{AD} = \underline{b} \text{ ලෙස ගෙන,}$$

(i) $DR:RP$ අනුපාතය සොයන්න.

(ii) $AB = 6$ ඒකක, $AD = 9$ ඒකක සහ $\hat{BAD} = \frac{\pi}{3}$ නම්, $\hat{DRC} = \cos^{-1}\left(\frac{8}{\sqrt{91}}\right)$ බව පෙන්වන්න.

(b) ABC පැත්තක දිග $2a$ m වන වාමාවර්තව ශීර්ෂ ගත් සමපාද ත්‍රිකෝණයකි. BC හි මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යය M වේ. විශාලත්වයන් හිච්චන් $5\sqrt{3}, 3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}$ හා 2 වූ බල පිළිවෙලින් $\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}$ හා \overrightarrow{MA} ඔස්සේ ක්‍රියාකරයි.

බල පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ විශාලත්වය හා දිශාව සොයන්න. සම්ප්‍රයුක්ත බලයේ ක්‍රියාරේඛාව BC පාදය N හිදී හමුවේ නම් CN සොයන්න.

(c) දෛශික දෙකක අදිශ ගුණිතය අර්ථ දැක්වන්න.

AOB ත්‍රිකෝණයක AB පාදය මත වූ C ලක්ෂ්‍යය $BC:CA = \alpha:\beta$ වන පරිදි පිහිටා ඇත. මෙහි $\hat{BOC} = \phi, \hat{AOC} = \theta$ ද වේ. මෙහි O යනු මූල ලක්ෂ්‍යයි.

$$\overrightarrow{OA} = \underline{a} \text{ ද } \overrightarrow{OB} = \underline{b} \text{ ද නම් } C \text{ ලක්ෂ්‍යයේ පිහිටුම් දෛශිකය } \underline{c} = \frac{\alpha\underline{a} + \beta\underline{b}}{\alpha + \beta} \text{ බව පෙන්වන්න.}$$

\underline{c} දෛශිකය සමග \underline{a} හා \underline{b} දෛශික වල තිත් ගුණිත ලබාගෙන

$$\cos(\theta + \phi) = \frac{\alpha|\underline{a}| \cos \phi - \beta|\underline{b}| \cos \theta}{\alpha|\underline{a}| \cos \theta - \beta|\underline{b}| \cos \phi} \text{ බව පෙන්වන්න.}$$